Correction du contrôle 6
Vecteurs
Tableaux de signe

Solution de l'exercice 1.

1. Par lecture graphique on obtient $\vec{u}\,(3;1)$, $A\,(3;1)$ et $D\,(10;6)$.
2. D'après la formule du cours, les coordonnées du vecteur $\vec{CD}$ sont

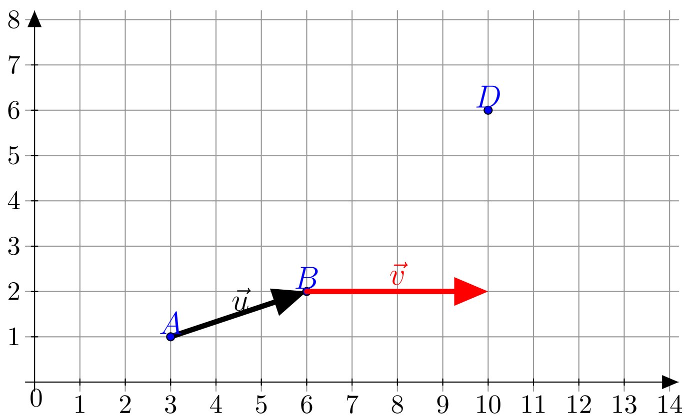
$$(x_D - x_C; y_D - y_C) = (10 - 12; 6 - 4) = (-2; 2)\,.$$

De même les coordonnées du vecteur $\vec{AC}$ sont

$$(x_C - x_A; y_C - y_A) = (12 - 3; 4 - 1) = (9; 3)\,.$$

3. Par définition $\vec{v} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{CD} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{CD}$. Or le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(3; 1)$ et le vecteur $\vec{CD}$ a pour coordonnées $(-2; 2)$. Donc les coordonnées de $\vec{v}$ sont égales à

$$\begin{aligned}(3;1) - \frac{1}{2}(-2;2) &= (3;1) - \left(\frac{-2}{2}; \frac{2}{2}\right)\\ &= (3;1) - (-1;1) = (3-(-1); 1-1) = (3+1; 0) = (4;0)\,.\end{aligned}$$



4. On a $\vec{u}\,(3;1)$ et $\vec{AC}\,(9;3) = 3\,(3;1)$. Donc on remarque que $\vec{AC} = 3\vec{u}$. Donc par définition, $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
5. D'après la question précédente, les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Donc par une propriété du cours, on déduit que les points A, B et C sont alignés.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}5x + 3 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 5x \geqslant -3\\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-3}{5}.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $\left[-\frac{3}{5}; +\infty\right[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 3x - 9 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 3x \geqslant 9 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble solution est $[3; +\infty[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 3x + 8 \leqslant -4x + 3 &\Leftrightarrow 3x + 4x \leqslant 3 - 8 \\ &\Leftrightarrow 7x \leqslant -5 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble solution est $\left]-\infty; -\frac{5}{7}\right]$.

4. D'après la question 1, $5x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{-3}{5}$ et d'après la question 2, $3x - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$. On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		3		$+\infty$
$5x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$(5x + 3)(3x - 9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble solution de l'équation $(5x + 3)(3x - 9) \geqslant 0$ est donc $\left]-\infty; -\frac{3}{5}\right] \cup [3; +\infty[$.

5. D'après la question 2, $3x - 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ et de même que dans la question 3,

$$\begin{aligned} 7x + 5 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 7x \geqslant -5 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

   On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{7}$		3		$+\infty$
$3x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x + 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x - 9)(7x + 5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble solution de l'équation $(3x - 9)(7x + 5) \leqslant 0$ est donc $\left[-\frac{5}{7}; 3\right]$.

Solution de l'exercice 3.

1. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AC]$, donc les droites (AI) et (IC) sont confondues. Donc les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IC}$ ont la même direction. De plus A, I, C sont alignés dans cet ordre donc les $\vec{AI}$ et $\vec{IC}$ ont le même sens. Enfin puisque $AI = IC$, les vecteurs ont la même norme. Finalement, les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IC}$ sont égaux.
2. D'après la relation de Chasles : $\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC}$.
3. Or d'après la question 1, $\vec{IC} = \vec{AI}$. Donc
$$\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC} = \vec{AI} + \vec{AI} = 2\vec{AI}.$$
4. D'après la relation Chasles, $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$.
5. De la même façon que dans la question 1, puisque I est le milieu de $[BD]$, les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{ID}$ sont égaux. Donc $\vec{ID} = \vec{BI} = -\vec{IB}$.
6. D'après la question 4, $\vec{AD} = \vec{AI}+\vec{ID}$. Donc en utilisant la question 5, on a $\vec{AD} = \vec{AI}-\vec{IB}$.
7. D'après la question 4 et 6, $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} - \vec{IB}$. Donc
$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} - \vec{IB} = 2\vec{AI}.$$
8. D'après la question 3, $\vec{AC} = 2\vec{AI}$. Donc finalement,
$$\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AI} = \vec{AC}.$$
9. D'après la formule du cours, les coordonnées de $\vec{AI}$ sont
$$(x_I - x_A; y_I - y_A) = (6 - 2; 4 - 5) = (4; -1).$$
De même les coordonnées de $\vec{IC}$ sont
$$(x_C - x_I; y_C - y_I) = (x - 6; y - 4).$$
10. Or d'après la question 1, $\vec{AI} = \vec{IC}$. Donc $(4; -1) = (x - 6; y - 4)$, c'est-à-dire
$$\left\{\begin{array}{l} 4 = x - 6 \\ \\ -1 = y - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 + 6 = x \\ \\ -1 + 4 = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ \\ y = 3 \end{array}\right.$$
Donc les coordonnées du point C sont $(10; 3)$.
11. Dans la question 8, on retrouve la règle du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.